Всероссийская олимпиада школьников по математике.

II этап **5 класс** **14.11.2019**

Работа рассчитана на 180 минут

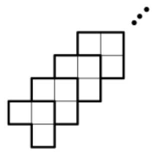
1. В двух корзинах было 90 яблок. Когда из одной корзины взяли 1/4 яблок в ней лежавших и положили их в другую корзину, яблок в обеих корзинах стало поровну. Сколько яблок было первоначально в каждой из их?

2. Некоторые квадраты таблицы заминированы. Каждое записанное в квадрате число показывает количество мин в квадратах, соседних с данным квадратом (см. рис.). (См. рисунок. Соседними являются квадраты, имеющие по крайней мере одну общую точку; квадрат с числом не заминирован). В скольких квадратах точно нет мин? Ответ обоснуйте.

3		1	

3. Петя в записи **+**=*** заменил звёздочки различными цифрами так, чтобы получилось верное равенство: 59+64=123. Он утверждает, что его трёхзначное число - наименьшее из возможных при замене звёздочек различными цифрами. Прав ли он?

4. Из 2019 уголков, состоящих из трёх клеток со стороной 1см, составили фигуру, показанную на рисунке. Найти её периметр и площадь.



5. В ряд выложили десять монет, среди которых есть несколько фальшивых, которые тяжелее настоящих и не обязательно одного веса. Все настоящие монеты весят одинаково. Среди любых трех монет, лежащих подряд, есть ровно одна фальшивая. Можно ли за одно взвешивание на двухчашечных весах найти количество фальшивых монет?

6. Из девяти пятиклассников каждый знаком с двумя другими. Всегда ли среди них можно выбрать четверых, любые двое из которых не знакомы?

Всероссийская олимпиада школьников по математике.

II этап **5 класс** **14.11.2019**

Работа рассчитана на 180 минут

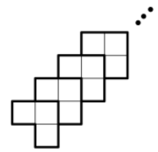
1. В двух корзинах было 90 яблок. Когда из одной корзины взяли 1/4 яблок в ней лежавших и положили их в другую корзину, яблок в обеих корзинах стало поровну. Сколько яблок было первоначально в каждой из их?

2. Некоторые квадраты таблицы заминированы. Каждое записанное в квадрате число показывает количество мин в квадратах, соседних с данным квадратом (см. рис.). (См. рисунок. Соседними являются квадраты, имеющие по крайней мере одну общую точку; квадрат с числом не заминирован). В скольких квадратах точно нет мин? Ответ обоснуйте.

3		1	

3. Петя в записи **+**=*** заменил звёздочки различными цифрами так, чтобы получилось верное равенство: 59+64=123. Он утверждает, что его трёхзначное число - наименьшее из возможных при замене звёздочек различными цифрами. Прав ли он?

4. Из 2019 уголков, состоящих из трёх клеток со стороной 1см, составили фигуру, показанную на рисунке. Найти её периметр и площадь.



5. В ряд выложили десять монет, среди которых есть несколько фальшивых, которые тяжелее настоящих и не обязательно одного веса. Все настоящие монеты весят одинаково. Среди любых трех монет, лежащих подряд, есть ровно одна фальшивая. Можно ли за одно взвешивание на двухчашечных весах найти количество фальшивых монет?

6. Из девяти пятиклассников каждый знаком с двумя другими. Всегда ли среди них можно выбрать четверых, любые двое из которых не знакомы?

Всероссийская олимпиада школьников по математике.

II этап **6 класс** **14.11.2019**

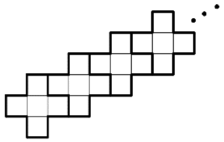
Работа рассчитана на 180 минут

1. 1. В записи **+**=*** Миша заменил звёздочки различными цифрами так, чтобы получилось верное равенство: 92+83=175. Он утверждает, что его трёхзначное число - наибольшее из возможных при замене звёздочек различными цифрами. Прав ли он?

2. Некоторые квадраты таблицы заминированы. Каждое записанное в квадрате число показывает количество мин в квадратах, соседних с данным квадратом. (см. рис.). (См. рисунок. Соседними являются квадраты, имеющие по крайней мере одну общую точку; квадрат с числом не заминирован). Сколькими способами можно расставить мины в таблице? Ответ обоснуйте.

2		1	

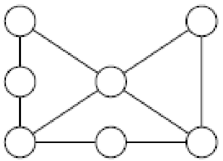
3. Из 2019 пятиклеточных фигур (плюсиков) составили фигуру, изображённую на рисунке. Найти её площадь и периметр, если сторона клетки равна 1см.



4. В ряд выложили четыре монеты, среди которых могут быть фальшивые. Среди любых трех подряд лежащих - не более одной фальшивой. За наименьшее число взвешиваний на двухчашечных весах найти фальшивые монеты или убедиться, что их нет, если настоящие весят одинаково и легче фальшивых. Фальшивые могут иметь равный вес, а могут разный.

5. Разрезать на пять частей квадрат 7×7 и сложить из них три квадрата различных размеров.

6. В кружочки на рис. вписали числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7 так, чтобы сумма чисел в кружочках, расположенных на каждой из пяти проведенных линий, была одинаковой. Ни одно число не использовано несколько раз. Какое число может оказаться в левом нижнем кружочке?



Всероссийская олимпиада школьников по математике.

II этап **6 класс** **14.11.2019**

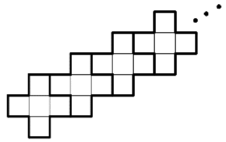
Работа рассчитана на 180 минут

1. 1. В записи **+**=*** Миша заменил звёздочки различными цифрами так, чтобы получилось верное равенство: 92+83=175. Он утверждает, что его трёхзначное число - наибольшее из возможных при замене звёздочек различными цифрами. Прав ли он?

2. Некоторые квадраты таблицы заминированы. Каждое записанное в квадрате число показывает количество мин в квадратах, соседних с данным квадратом. (см. рис.). (См. рисунок. Соседними являются квадраты, имеющие по крайней мере одну общую точку; квадрат с числом не заминирован). Сколькими способами можно расставить мины в таблице? Ответ обоснуйте.

2		1	

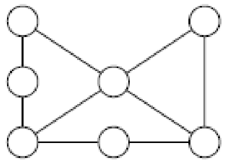
3. Из 2019 пятиклеточных фигур (плюсиков) составили фигуру, изображённую на рисунке. Найти её площадь и периметр, если сторона клетки равна 1см.



4. В ряд выложили четыре монеты, среди которых могут быть фальшивые. Среди любых трех подряд лежащих - не более одной фальшивой. За наименьшее число взвешиваний на двухчашечных весах найти фальшивые монеты или убедиться, что их нет, если настоящие весят одинаково и легче фальшивых. Фальшивые могут иметь равный вес, а могут разный.

5. Разрезать на пять частей квадрат 7×7 и сложить из них три квадрата различных размеров.

6. В кружочки на рис. вписали числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7 так, чтобы сумма чисел в кружочках, расположенных на каждой из пяти проведенных линий, была одинаковой. Ни одно число не использовано несколько раз. Какое число может оказаться в левом нижнем кружочке?



Всероссийская олимпиада школьников по математике.

II этап **7 класс** **14.11.2019**

Работа рассчитана на 235 минут

1. Докажите, что ребус ABCD+ BCD+ CD+ D=2019 не имеет решений.

2. На четырёх карточках написали четыре числа, сумма которых равна 360. Можно выбрать три карточки, на которых написаны одинаковые числа. Есть две карточки, на одной из которых написано число в три раза больше другого. Какие числа могут быть написаны на карточках?

3. Четыре мальчика, четыре девочки и тренер расположились на дорожке, имеющей форму окружности. Каждая девочка стоит диаметрально противоположно к одному из мальчиков. Длина дорожки равна 50м. По команде тренера все они по кратчайшему пути по дорожке бегут к нему. Какое расстояние пробегут все дети вместе?

4. Некоторые квадраты таблицы заминированы. Каждое записанное в квадрате число показывает количество мин в квадратах, соседних с данным квадратом. (См. рисунок. Соседними являются квадраты, имеющие по крайней мере одну общую точку; квадрат с числом не заминирован). Сколькими способами можно расставить мины в таблице? Ответ обоснуйте.

2		1		2

5. Из десяти семиклассников каждый знаком ровно с двумя другими. Доказать, что среди них можно выбрать четверых, любые двое из которых не знакомы. Считаем, что если A знаком с B, то и B знаком с A.

6. По кругу лежат шесть монет двух типов, отличающиеся только массой – фальшивые и настоящие. Среди трех подряд лежащих - не более одной фальшивой. За два взвешивания на двухчашечных весах найти фальшивые монеты, если настоящие монеты весят одинаково и легче фальшивых, которые тоже весят одинаково.

Всероссийская олимпиада школьников по математике.

II этап **7 класс** **14.11.2019**

Работа рассчитана на 235 минут

1. Докажите, что ребус ABCD+ BCD+ CD+ D=2019 не имеет решений.

2. На четырёх карточках написали четыре числа, сумма которых равна 360. Можно выбрать три карточки, на которых написаны одинаковые числа. Есть две карточки, на одной из которых написано число в три раза больше другого. Какие числа могут быть написаны на карточках?

3. Четыре мальчика, четыре девочки и тренер расположились на дорожке, имеющей форму окружности. Каждая девочка стоит диаметрально противоположно к одному из мальчиков. Длина дорожки равна 50м. По команде тренера все они по кратчайшему пути по дорожке бегут к нему. Какое расстояние пробегут все дети вместе?

4. Некоторые квадраты таблицы заминированы. Каждое записанное в квадрате число показывает количество мин в квадратах, соседних с данным квадратом. (См. рисунок. Соседними являются квадраты, имеющие по крайней мере одну общую точку; квадрат с числом не заминирован). Сколькими способами можно расставить мины в таблице? Ответ обоснуйте.

2		1		2

5. Из десяти семиклассников каждый знаком ровно с двумя другими. Доказать, что среди них можно выбрать четверых, любые двое из которых не знакомы. Считаем, что если A знаком с B, то и B знаком с A.

6. По кругу лежат шесть монет двух типов, отличающиеся только массой – фальшивые и настоящие. Среди трех подряд лежащих - не более одной фальшивой. За два взвешивания на двухчашечных весах найти фальшивые монеты, если настоящие монеты весят одинаково и легче фальшивых, которые тоже весят одинаково.

Всероссийская олимпиада школьников по математике.

II этап **8 класс** **14.11.2019**

Работа рассчитана на 235 минут

1. На доске написано несколько различных целых чисел таких, что произведение трёх наименьших из них равно 8, а произведение трёх наибольших из них равно 27. Может ли оказаться, что на доске написано ровно пять чисел?

2. Петя в 16 клетках квадрата 5×5 записал единицы, а в оставшихся девяти - нули. Петя нашёл все возможные суммы в четырёх клетках, образующих квадрат 2×2. Оказалось, что сумма шестнадцати чисел, найденных Петей, равна 28. В каких клетках записаны единицы? Нужно указать все варианты.

3. Действительные числа a и b таковы, что $a^5+b^5=3$, $a^{15}+b^{15}=9$. Найти значение выражения $a^{10}+b^{10}$.

4. В компании из 8 человек каждый знаком ровно с 6 другими. Сколькими способами можно выбрать четырёх человек, любые двое из которых знакомы? (Считаем, что если А знаком с В, то и В знаком с А, а также, что человек не знаком сам с собой, так как понятие знакомства относится к двум разным людям.)

5. На стороне ВС треугольника АВС взяли точку Р так, что $\angle PAB=45°$. Серединный перпендикуляр к отрезку АР пересекает сторону АС в точке Q. Оказалось, что $PQ\perp BC$. Доказать, что треугольник АВС равнобедренный.

6. Пусть a и b – натуральные числа. Доказать, что хотя бы одно из чисел: a, b, $a+b$ - равняется разности квадратов двух целых чисел.

Всероссийская олимпиада школьников по математике.

II этап **8 класс** **14.11.2019**

Работа рассчитана на 235 минут

1. На доске написано несколько различных целых чисел таких, что произведение трёх наименьших из них равно 8, а произведение трёх наибольших из них равно 27. Может ли оказаться, что на доске написано ровно пять чисел?

2. Петя в 16 клетках квадрата 5×5 записал единицы, а в оставшихся девяти - нули. Петя нашёл все возможные суммы в четырёх клетках, образующих квадрат 2×2. Оказалось, что сумма шестнадцати чисел, найденных Петей, равна 28. В каких клетках записаны единицы? Нужно указать все варианты.

3. Действительные числа a и b таковы, что $a^5+b^5=3$, $a^{15}+b^{15}=9$. Найти значение выражения $a^{10}+b^{10}$.

4. В компании из 8 человек каждый знаком ровно с 6 другими. Сколькими способами можно выбрать четырёх человек, любые двое из которых знакомы? (Считаем, что если А знаком с В, то и В знаком с А, а также, что человек не знаком сам с собой, так как понятие знакомства относится к двум разным людям.)

5. На стороне ВС треугольника АВС взяли точку Р так, что $\angle PAB=45°$. Серединный перпендикуляр к отрезку АР пересекает сторону АС в точке Q. Оказалось, что $PQ\perp BC$. Доказать, что треугольник АВС равнобедренный.

6. Пусть a и b – натуральные числа. Доказать, что хотя бы одно из чисел: a, b, $a+b$ - равняется разности квадратов двух целых чисел.

Всероссийская олимпиада школьников по математике.

II этап **9 класс** **14.11.2019**

Работа рассчитана на 235 минут

1. Иван и Петр бегут в одном направлении по круговым дорожкам с общим центром, причем вначале они находятся на минимальном расстоянии друг от друга. Иван делает один полный круг каждые 20 секунд, а Пётр делает один полный круг каждые 28 секунд. Через какое наименьшее время они будут находиться на максимальном расстоянии друг от друга?

2. Числа a и b не меньше 3. Доказать, что верно неравенство — — ——. При каких значениях a и b достигается равенство?

3. Найти все функции *f*, определённые на множестве действительных чисел и принимающие действительные значения такие, что для любых действительных x и y выполняется равенство $f(xy)=f(x)f(y)+2xy$.

4. Рациональные числа a, b и c таковы, что $(a+b+c)\,(a+b-c)=2c^2$. Доказать, что $c=0$.

5. Биссектрисы AD и BE треугольника ABC пересекаются в точке I. Оказалось, что $CA\cdot CB=AB^2$. Доказать, что площадь треугольника ABI равна площади четырёхугольника CDIE.

6. В одной компании среди любых 9 человек есть два человека, которые знают друг друга. Доказать, что в этой компании найдется группа из восьми человек такая, что каждый из остальных знает кого-нибудь из этой группы.

Всероссийская олимпиада школьников по математике.

II этап **9 класс** **14.11.2019**

Работа рассчитана на 235 минут

1. Иван и Петр бегут в одном направлении по круговым дорожкам с общим центром, причем вначале они находятся на минимальном расстоянии друг от друга. Иван делает один полный круг каждые 20 секунд, а Пётр делает один полный круг каждые 28 секунд. Через какое наименьшее время они будут находиться на максимальном расстоянии друг от друга?

2. Числа a и b не меньше 3. Доказать, что верно неравенство — — ——. При каких значениях a и b достигается равенство?

3. Найти все функции *f*, определённые на множестве действительных чисел и принимающие действительные значения такие, что для любых действительных x и y выполняется равенство $f(xy)=f(x)f(y)+2xy$.

4. Рациональные числа a, b и c таковы, что $(a+b+c)\,(a+b-c)=2c^2$. Доказать, что $c=0$.

5. Биссектрисы AD и BE треугольника ABC пересекаются в точке I. Оказалось, что $CA\cdot CB=AB^2$. Доказать, что площадь треугольника ABI равна площади четырёхугольника CDIE.

6. В одной компании среди любых 9 человек есть два человека, которые знают друг друга. Доказать, что в этой компании найдется группа из восьми человек такая, что каждый из остальных знает кого-нибудь из этой группы.

Всероссийская олимпиада школьников по математике.

II этап **10 класс** **14.11.2019**

Работа рассчитана на 235 минут

1. Иван и Петр бегут в разных направлениях по круговым дорожкам с общим центром, причем вначале они находятся на минимальном расстоянии друг от друга. Иван делает один полный круг каждые 20 секунд, а Пётр делает один полный круг каждые 28 секунд. Через какое наименьшее время они будут находиться на максимальном расстоянии друг от друга?

2. Рациональные числа a, b и c таковы, что $(a+b+c)(a+b-c)=4c^2$. Доказать, что $a+b=0$.

3. Пусть $f(x)=x^2-px+q$. Оказалось, что $f(p+q)=0$ и $f(p-q)=0$. Найти p и q.

4. Найти все функции f, определённые на множестве действительных чисел и принимающие действительные значения такие, что для любых действительных x и y выполняется равенство

$$f(xy)=f(x)f(y)-2xy.$$

5. Биссектрисы AD и BE треугольника ABC пересекаются в точке I. Оказалось, что площадь треугольника ABI равна площади четырёхугольника CDIE. Найти AB, если CA=9, CB=4.

6. В одной компании среди любых 9 человек есть два человека, которые знают друг друга. Доказать, что в этой компании найдется группа из восьми человек такая, что каждый из остальных знает кого-нибудь из этой группы.

Всероссийская олимпиада школьников по математике.

II этап **10 класс** **14.11.2019**

Работа рассчитана на 235 минут

1. Иван и Петр бегут в разных направлениях по круговым дорожкам с общим центром, причем вначале они находятся на минимальном расстоянии друг от друга. Иван делает один полный круг каждые 20 секунд, а Пётр делает один полный круг каждые 28 секунд. Через какое наименьшее время они будут находиться на максимальном расстоянии друг от друга?

2. Рациональные числа a, b и c таковы, что $(a+b+c)(a+b-c)=4c^2$. Доказать, что $a+b=0$.

3. Пусть $f(x)=x^2-px+q$. Оказалось, что $f(p+q)=0$ и $f(p-q)=0$. Найти p и q.

4. Найти все функции f, определённые на множестве действительных чисел и принимающие действительные значения такие, что для любых действительных x и y выполняется равенство

$$f(xy)=f(x)f(y)-2xy.$$

5. Биссектрисы AD и BE треугольника ABC пересекаются в точке I. Оказалось, что площадь треугольника ABI равна площади четырёхугольника CDIE. Найти AB, если CA=9, CB=4.

6. В одной компании среди любых 9 человек есть два человека, которые знают друг друга. Доказать, что в этой компании найдется группа из восьми человек такая, что каждый из остальных знает кого-нибудь из этой группы.

Всероссийская олимпиада школьников по математике.

II этап **11 класс** **14.11.2019**

Работа рассчитана на 235 минут

1. Доказать, что если $2^x+y<z$ и $2^y+z<x$, то $2^z+x>y$.

2. В тетраэдре совпали центры описанной и полувписанной сфер. Верно ли, что тетраэдр правильный? (Полувписанная в тетраэдр сфера – это сфера, касающаяся всех его рёбер.)

3. Решить уравнение $sinx+cosx+sinx\, cosx=2$.

4. Найти все функции f, определённые на множестве действительных чисел и принимающие действительные значения такие, что для любых действительных x, y и z выполняется равенство

$$f(xyz)=f(x)f(y)f(z)-6xyz.$$

5. Биссектрисы AD и BE треугольника ABC пересекаются в точке I. Оказалось, что площадь треугольника ABI равна площади четырёхугольника CDIE. Найти наибольшее возможное значение угла ACB.

6. В одной компании среди любых 11 человек есть два человека, которые знают друг друга. Доказать, что в этой компании найдется группа из десяти человек такая, что каждый из остальных знает кого-нибудь из этой группы.

Всероссийская олимпиада школьников по математике.

II этап **11 класс** **14.11.2019**

Работа рассчитана на 235 минут

1. Доказать, что если $2^x+y<z$ и $2^y+z<x$, то $2^z+x>y$.

2. В тетраэдре совпали центры описанной и полувписанной сфер. Верно ли, что тетраэдр правильный? (Полувписанная в тетраэдр сфера – это сфера, касающаяся всех его рёбер.)

3. Решить уравнение $sinx+cosx+sinx\, cosx=2$.

4. Найти все функции f, определённые на множестве действительных чисел и принимающие действительные значения такие, что для любых действительных x, y и z выполняется равенство

$$f(xyz)=f(x)f(y)f(z)-6xyz.$$

5. Биссектрисы AD и BE треугольника ABC пересекаются в точке I. Оказалось, что площадь треугольника ABI равна площади четырёхугольника CDIE. Найти наибольшее возможное значение угла ACB.

6. В одной компании среди любых 11 человек есть два человека, которые знают друг друга. Доказать, что в этой компании найдется группа из десяти человек такая, что каждый из остальных знает кого-нибудь из этой группы.