**№1.** Автомобиль проехал первую половину пути со скоростью $\upsilon_1 = 40\,\text{км}/ч$, а вторую – со скоростью $\upsilon_2 = 60\,\text{км/ч}$. Определить среднюю скорость автомобиля на всем пройденном пути. (5 мин)

**№2.** Свободно падающее тело за последнюю секунду прошло $1/3$ своего пути. Сколько времени и с какой высоты падало тело? (10 мин)

**№3.** Масса Марса составляет 0.1 от массы Земли, диаметр Марса вдвое меньше, чем диаметр Земли. Каково отношение периодов обращения искусственных спутников Марса и Земли, движущихся по круговым орбитам на небольшой высоте? (5 мин)

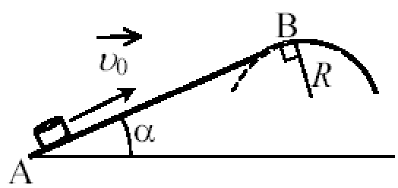
**№4.** У края диска, радиус которого $R = 20\,\text{см}$, лежит монета. Диск раскручивают так, что его угловая скорость линейно зависит от времени $(\omega = 0.2t)$. В какой момент времени $t$ монета слетит с диска, если коэффициент трения между поверхностями диска и монеты $\mu = 0.2$? (15 мин)

**№5.** На горизонтальной плоскости стоит брусок массы М. К бруску приложена горизонтальная сила $F = at$, где $a$ – постоянная, $t > 0$ – время. Нарисовать график зависимости силы трения действующей на брусок со стороны плоскости от времени. Коэффициент трения равен $\mu$. (10 мин)

**№6.** Летящий снаряд разрывается на два осколка. По отношению к направлению движения снаряда первый осколок летит под углом 90° со скоростью $50\,\text{м/с}$, а второй – под углом 30° со скоростью $100\,\text{м/с}$. Найдите отношение массы первого осколка к массе второго осколка. (5 мин)

**№7.** Груз массой $m$, подвешенный на пружине, совершает гармонические колебания с периодом $T$ и амплитудой $x_{\max}$. Что произойдет с максимальной потенциальной энергией пружины, периодом и частотой колебаний, если при неизменной амплитуде уменьшить массу груза? (5 мин)

**№8.** Небольшая шайба после удара скользит вверх по наклонной плоскости из точки А (см. рисунок). В точке В наклонная плоскость без излома переходит в наружную поверхность горизонтальной трубы радиусом $R$. Если в точке А скорость шайбы превосходит $\upsilon_0 = 4$ м/с, то в точке В шайба отрывается от опоры. Длина наклонной плоскости $\text{AB} = L = 1\,\text{м}$, угол $\alpha = 30^o$. Коэффициент трения между наклонной плоскостью и шайбой $\mu = 0.2$. Найдите внешний радиус трубы $R$. (15 мин)

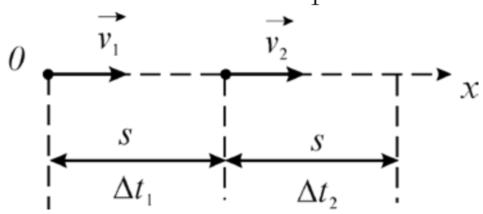



**№9.** Колесо радиусом $R = 0.3\,\text{м}$ и массой $m = 7\,\text{кг}$ стоит перед ступенькой высотой $h = 0.1\,\text{м}$. Какую наименьшую горизонтальную силу $\vec{\text{F}}$ нужно приложить к оси колеса, чтобы оно могло подняться на ступеньку? Трением пренебречь.(10 мин)

**№10.** Точка А движется со скоростью $1\,\text{м/с}$, точка В – со скоростью $2\,\text{м/с}$. При этом направления скоростей все время совпадают и расстояние АВ остается постоянным. Опишите, как движутся эти точки. (5 мин)

**№1. Решение**. Предполагая, что автомобиль движется вдоль прямой линии и обозначая через $2s$ весь путь, пройденный им, имеем:

$$\Delta r_1 = \Delta r_2 = s, \quad \Delta t_1 = \frac{s}{\upsilon_1}, \quad \Delta t_2 = \frac{s}{\upsilon_2}.$$




Тогда средняя скорость на всем пройденном пути будет равна:

$$\upsilon_{ср} = \frac{2s}{s/\upsilon_1 + s/\upsilon_2} = \frac{2\upsilon_1\upsilon_2}{\upsilon_1 + \upsilon_2} = 48 \text{ км/ч}.$$

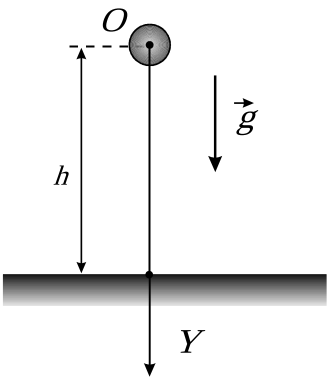
**Ответ**: $\upsilon_{ср} = \dfrac{2\upsilon_1\upsilon_2}{\upsilon_1 + \upsilon_2} = 48$ км/ч.

**№2. Решение.** В системе координат, начало которой в точке падения тела, а ось координат направлена вертикально вниз, уравнение движения примет вид:

$$y = \frac{at^2}{2},$$

причем начальные условия будут: $x_0 = 0$, $v_0 = 0$, $a = g$.

Пусть $t = n\tau$ – время падения тела, где $\tau = 1$ с, а $n$ – число секунд падения.




Если тело падало время $t$, то высота падения равна $h = \dfrac{gn^2\tau^2}{2}$.

С другой стороны, по условию, через время $(n-1)\tau$ после начала падения координата тела была равна:

$$\frac{2}{3}h = \frac{g(n-1)^2\tau^2}{2}.$$

Решая совместно два последних уравнения, найдем: $t = n\tau \cong 5.45$ с, $h \cong 145.5$ м.

**Ответ**: $t = n\tau \cong 5.45$ с, $h \cong 145.5$ м.

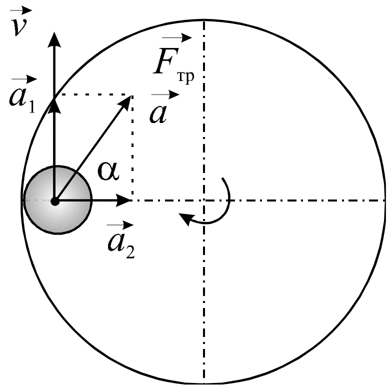
**№3. <u>Решение</u>**. Ускорение спутника, движущегося со скоростью $v$ вокруг планеты массой $M$ по круговой орбите радиуса $R$, равно $a = v^2/R$. Сила всемирного тяготения $F = G\dfrac{Mm}{R^2} = ma$, откуда $a = G\dfrac{M}{R^2}$. Следовательно, скорость движения по орбите. $v = \sqrt{\dfrac{GM}{R}}$. Период обращения спутника $T = 2\pi R/v = 2\pi\sqrt{\dfrac{R^3}{GM}}$. Для данных в задаче Марса и Земли получим: $\dfrac{T_M}{T_Z} = \sqrt{\dfrac{R_M^3 M_Z}{R_Z^3 M_M}} = \sqrt{0{,}125\cdot 10} \approx 1.1$.

**<u>Ответ</u>**: $\dfrac{T_M}{T_Z} = \sqrt{\dfrac{R_M^3 M_Z}{R_Z^3 M_M}} \approx 1.1$.

**№4. <u>Решение</u>**. До тех пор, пока монета лежит на диске, ее скорость $\vec{v}$ равна линейной скорости соответствующих точек диска:

$$v = \omega R = \varepsilon t \cdot R = a_1 t\,,$$

где $a_1 = \varepsilon R$ – тангенциальная составляющая ускорения.




Центростремительное ускорение монеты, обеспечивающее ее движение по окружности, равно:

$$a_2 = \frac{v^2}{R} = \varepsilon^2 t^2 R\,.$$

Полное ускорение монеты составит величину:

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \varepsilon R\sqrt{1+\varepsilon^2 t^4}\,.$$

Это ускорение создается силой трения:

$$F_{тр} = \mu\theta = \mu m g = ma\,.$$

Из двух последних уравнений определим момент времени $t$, в который монета слетит с диска:

$$t = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left(\frac{\mu^2 g^2}{\varepsilon^2 R^2} - 1\right)^{1/4} = 15.8\ \text{с}\,.$$

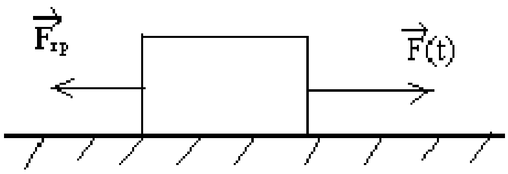
**<u>Ответ</u>**: $t = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left(\dfrac{\mu^2 g^2}{\varepsilon^2 R^2} - 1\right)^{1/4} = 15.8\ \text{с}$.

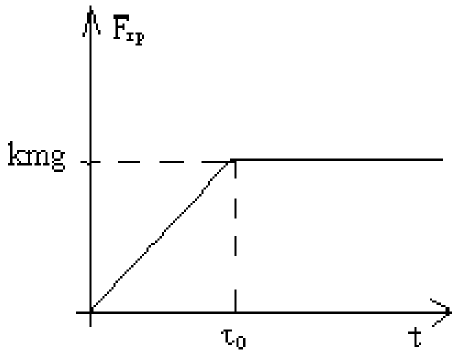
**№5. <u>Решение</u>**. В начальный момент времени сила трения действующая на брусок со стороны плоскости есть сила трения покоя; ее величина такова, что тело покоится:

$$ma = 0 = F_{\text{тр пок}} - F = F_{\text{тр пок}} - at \text{, откуда } F_{\text{тр пок}} = at .$$

Однако сила трения покоя не может быть слишком велика, ее мах значение есть $F_{\text{тр пок макс}} = kN$, где $N = mg$ – сила реакции опоры.

Значит в момент времени $t = \tau_0$ такой, что $F_{\text{тр пок}} = kmg$ , а $\tau_0 = kmg/a$ брусок придет в движение. После этого момента сила трения будет постоянна и равна силе трения скольжения $F_{\text{тр}} = kmg$.



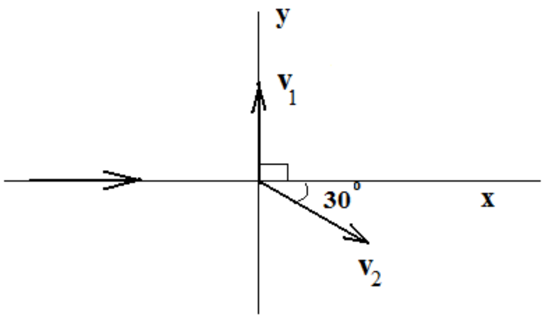




**<u>Ответ</u>**:

**№6. <u>Решение</u>**.

По закону сохранения импульса:

$$\text{вдоль оси } Oy: \quad m_1\upsilon_1 = m_2\upsilon_2 \sin 30^o \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{\upsilon_2 \sin 30^o}{\upsilon_1} = 1.$$




**<u>Ответ</u>**: 1.

**№7. <u>Решение</u>**. $E_n = \dfrac{kx_{\max}^2}{2}$ – максимальная потенциальная энергия пружины, т.к. амплитуда $x_{\max}$ не меняется, то и $E_n$ постоянна. $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ – период пружинного маятника. При уменьшении $m$, период $T$ уменьшится, а частота $\nu$ увеличится.

**№8. Решение**. Изменение полной механической энергии шайбы равно работе силы трения:

$$\frac{m\upsilon_B^2}{2} + mgL\sin\alpha - \frac{m\upsilon_0^2}{2} = -\mu mgL\cos\alpha\,. \qquad (1)$$

В точке В условием отрыва будет равенство центростремительного ускорения величине нормальной составляющей ускорения силы тяжести:

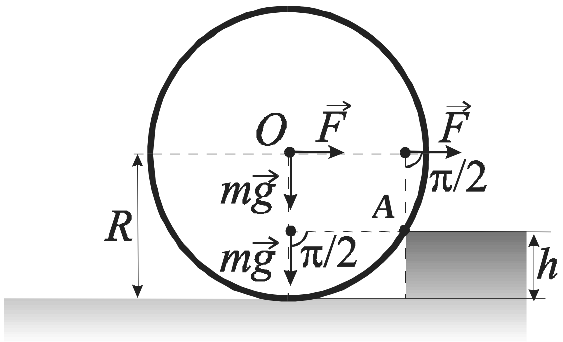
$$\frac{\upsilon_B^2}{R} = g\cos\alpha, \Rightarrow\ \upsilon_B^2 = gR\cos\alpha. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) находим внешний радиус трубы $R$:

$$R = \frac{\upsilon_0^2}{g\cos\alpha} - 2L(\mu + tg\alpha) \approx 0.3 \text{ м}.$$

**Ответ**: $R \approx 0.3$ м.

**№9. Решение**.




Чтобы колесо перекатилось через ступеньку, момент силы $\vec{F}$, приложенной к колесу относительно точки $A$, должен быть больше или равен моменту силы тяжести $m\vec{g}$ относительно этой точки:

$$F(R-h) \ge mg\sqrt{h(2R-h)}\,.$$

Отсюда: $$F \ge mg\frac{\sqrt{h(2R-h)}}{R-h}\,.$$

**Ответ**: 78 Н.

**№10. Решение**. Материальные точки движутся по окружностям с общим центром. При этом их скорости параллельны, поскольку направлены по касательной к окружности, но различаются, поскольку радиусы окружностей различаются в два раза.